Technische Universität München
Lehrstuhl Informatik VIII
Prof. Dr.-Ing. Georg Carle
Dipl.-Ing. Stephan Günther, M.Sc.
Johannes Naab, M.Sc.

Tutorübung zur Vorlesung Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme

Übungsblatt 2 (27. April – 30. April 2015)

Hinweis: Die mit * gekennzeichneten Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorhergehender Teilaufgaben lösbar.

Aufgabe 1 Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit

In der Vorlesung wurde die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für Funkverbindungen mit etwa $p_{e,1} = 10^{-4}$ sowie für Ethernet über Kupferkabel mit etwa $p_{e,2} = 10^{-8}$ angegeben. Wir nehmen an, dass Bitfehler unabhängig voneinander und gleichverteilt durch ein Rauschen mit über die Zeit konstanter Leistung auftreten. Die Kanaleigenschaften ändern sich über die Zeit hinweg also nicht. Weitere Störeinflüsse wie Interferenzen seien ausgeschlossen. Die Rahmenlänge betrage 1500 B.

a)* Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für beide Verbindungsarten, dass der Rahmen fehlerfrei übertragen wird?

Für die kabellose Verbindung:

$$\Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}] = p_{R1} = (1 - p_{e1})^{1500 \cdot 8} \approx 30.12\,\%$$

Für die kabelgebundene Verbindung:

$$\Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}] = p_{R2} = (1 - p_{e2})^{1500 \cdot 8} \approx 99.99\,\%$$

Im Folgenden betrachten wir nur noch die kabellose Verbindung. Da die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit relativ hoch ist, sieht ein Protokoll auf der Sicherungsschicht Bestätigungen vor. Für korrekt übertragene Rahmen wird also eine Bestätigung verschickt. Bleibt eine Bestätigung aus, so nimmt der Sender an, dass die Übertragung nicht erfolgreich war. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass Bestätigungen nicht verloren gehen.

b)* Gibt es eine maximale Anzahl an Wiederholungen, bis ein bestimmter Rahmen garantiert korrekt übertragen wurde?

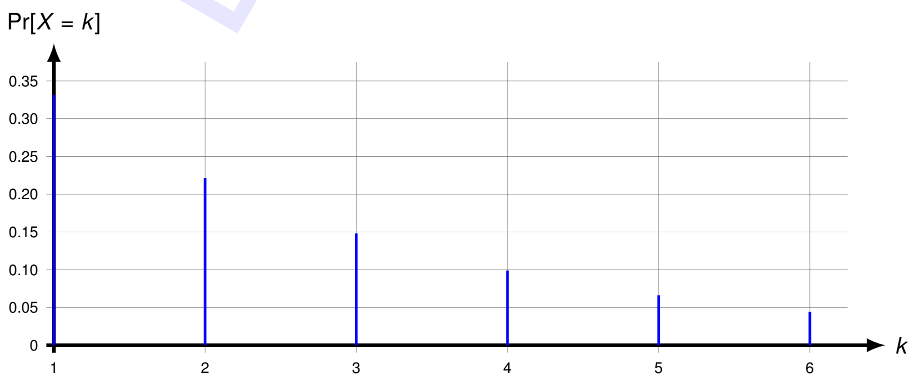
Nein. Die einzelnen Übertragungen sind unabhängig voneinander, d. h. es tritt auch bei jeder Wiederholung ein Rahmenfehler mit den in a) berechneten Wahrscheinlichkeiten auf. Es bleibt also stets ein Restrisiko.

c)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Rahmen genau k-mal übertragen werden muss.

Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der notwendigen Übertragungen an.

$$\begin{aligned}\Pr[X = k] &= \Pr[\text{„Übertragung } (k-1)\text{-mal erfolglos“}] \cdot \Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}] \\ &= (1 - p_{R1})^{k-1} \cdot p_{R1}\end{aligned}$$

d) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit aus c) für $k = 1, \ldots, 6$



e) Angenommen das zuständige Protokoll auf der Sicherungsschicht bricht die Wiederholung ab, falls der fünfte Sendeversuch erfolglos war. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen nicht übertragen werden kann?

Die Wahrscheinlichkeit entspricht der, dass die Übertragung fünf mal in Folge fehlschlug ohne Rücksicht darauf, ob es beim 6. Mal funktioniert oder nicht. Dies ergibt

$$\Pr[X > 5] = 1 - \Pr[X \leq 5] = 1 - \sum_{k=1}^{5} \Pr[X = k] \approx 16.67\%$$

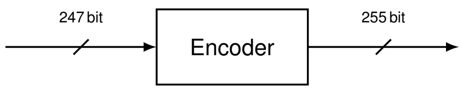
Alternative Lösung:

$$\Pr[X > 5] = (1 - p_{R1})^5 \approx 16.67\,\%$$

Achtung: Die alternative Lösung ist nur deswegen korrekt, da die X geometrisch verteilt ist und die geometrische Verteilung gedächtnislos ist, d. h. das Fehlschlagen der k-ten Übertragung beeinflusst nicht die $(k + 1)$-te Übertragung. Wäre diese Unabhängigkeit nicht erfüllt, so würde die alternative Lösung ein falsches Ergebnis liefern!

Aufgabe 2 **Kanalkodierung**

In einer der vorherigen Aufgabe haben wir gesehen, dass die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit bei schlechter Kanalqualität zum Problem werden kann. Für den Funkkanal mit einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p_e = 10^{-4}$ betrug die Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Rahmen der Länge 1500 B nur etwa 30 %. Um der hohen Bitfehlerrate zu begegnen, kommt nun ein Blockcode auf Schicht 1 zum Einsatz:



Dieser ermöglicht es dem Decoder auf der Empfängerseite in einem Kanalwort der Länge $n = 255$ bit *einen beliebigen* Bitfehler zu korrigieren. Treten zwei oder mehr Bitfehler auf, so ist die Entscheidung des Decoders falsch und die gesamte Information des Kanalworts verloren.

a)* Bestimmen Sie die Coderate.

$$R = \frac{k}{n} = \frac{247}{255} \approx 0.97$$

b)* Was sagt die Coderate aus?

Die Coderate drückt das Verhältnis zwischen der Größe eines Nutzdatenblocks und der Größe eines durch Redundanz gesicherten Nutzdatenblocks (Kanalwort) aus. Je kleiner R, desto mehr Redundanz wurde hinzugefügt. Für $R = 247/255$ trägt also jedes Kanalwort der Länge 255 bit insgesamt 8 bit an Redundanz sowie 247 bit Information.

c)* Da der Rahmen größer ist als ein Block von 247 bit, muss dieser in mehrere Blöcke zerlegt werden. Bestimmen Sie die Anzahl N der Kanalwörter, die übertragen werden müssen.

Jedes Kanalwort der Länge 255 bit trägt 247 bit Nutzdaten. Es ergibt sich also:

$$N = \left\lceil \frac{1500 \cdot 8}{247} \right\rceil = 49.$$

d)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Kanalwort fehlerhaft dekodiert wird.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Kanalwort fehlerhaft dekodiert wird, entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb des Kanalworts zwei oder mehr Fehler auftreten. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Bitfehler in einem Kanalwort der Länge n angibt.

$$p_{e,Codewort} = \Pr[X \geq 2] = 1 - \Pr[X \leq 1] = 1 - \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} \cdot p_e^i \cdot (1 - p_e)^{n-i} \approx 3.18 \cdot 10^{-4}$$

e) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen korrekt übertragen wird – also keines der Kanalwörter, die den Rahmen ausmachen, fehlerhaft übertragen wird.

Damit der Rahmen korrekt übertragen wird, müssen alle Kanalwörter korrekt übertragen werden. Es ergibt sich mit den Ergebnissen der vorhergehenden Teilaufgaben also:

$$\Pr[\text{„Kein Fehler im Rahmen“}] = (1 - p_{e,Codewort})^N = 98.45\,\%$$

f) Beurteilen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe e) bezüglich der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreich übertragenen Rahmen (30 %). Bedenken Sie dabei auch die durch R bedingte Verringerung der Übertragungsrate sowie die Alternative, defekte Rahmen zu wiederholen (vgl. Aufgabe 1e).

Im Vergleich zu der ursprünglichen Erfolgswahrscheinlichkeit bei der Übertragung eines Rahmens von nur etwa 30 % hat sich die Situation nun erheblich gebessert. Die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreich übertragenen Rahmen hat sich auf gut 98 % erhöht, was mehreren Zehnerpotenzen in der Bitfehlerrate entspricht. Natürlich muss man noch den Overhead durch Padding (insgesamt 103 bit im letzten Block) und Kanalkodierung beruecksichtigen. Damit ergibt sich eine Effizienz von

$$\eta = 0.97 \cdot 0.9845 \cdot \left(1 - \frac{103}{1500 \cdot 8 + 103}\right) \approx 0.95.$$

Mit der Methode aus Aufgabe 1e) müsste ein Rahmen 11 – 12 mal wiederholt werden, um eine ähnliche Erfolgswahrscheinlichkeit wie mit Kanalkodierung zu erreichen. Die mehrfache Übertragung desselben Rahmens reduziert natürlich die Nettodatenrate auf dem Kanal deutlich (muss ein Rahmen im Mittel zweimal übertragen werden, so halbiert sich die Nettodatenrate).

Fazit: Kanalkodierung ermöglicht überraschende Verbesserungen und ist bei unzuverlässigen Verbindungen unerlässlich. Erreicht wird dies im Fall von Blockcodes durch zwei Tricks:

- Der eigentliche Rahmen wird in kleinere Blöcke unterteilt – für jeden der Blöcke ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bereits bedeutend geringer als für den Rahmen im Ganzen. ABER: Da **alle** Codewörter korrekt übertragen werden müssen, gewinnt man zunächst noch nichts.
- Erst dadurch, dass pro Codewort an einer beliebigen Stelle ein Bitfehler auftreten darf, wird die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit bedeutend reduziert.